

Planche n° 17. Equations différentielles linéaires.

Corrigé

Exercice n° 1

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation différentielle considérée et (E_H) l'équation homogène associée.

1) Les solutions de (E) sur \mathbb{R} forment un \mathbb{R} -espace affine de direction l'espace des solutions de (E_H) sur \mathbb{R} qui est de dimension 1. La fonction $x \mapsto 1$ est une solution de (E) sur \mathbb{R} et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est une solution non nulle de (E_H) sur \mathbb{R} . Donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto 1 + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2) Les solutions de (E_H) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{x/2}$. Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} .

1ère solution. Il existe une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} de la forme $x \mapsto a \cos x + b \sin x$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (car i et $-i$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique). Soit f une telle fonction. Alors, pour tout réel x ,

$$2f'(x) - f(x) = 2(-a \sin x + b \cos x) - (a \cos x + b \sin x) = (-a + 2b) \cos x + (-2a - b) \sin x.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2f'(x) - f(x) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 1 \\ -2a - b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = -\frac{1}{5} \text{ et } b = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{5}(-\cos x + 2 \sin x) + \lambda e^{x/2}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2ème solution. Par la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{x/2}$ où λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Soit f une telle fonction.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2 \left(\lambda'(x)e^{x/2} + \frac{1}{2}\lambda(x)e^{x/2} \right) - 2\lambda(x)e^{x/2} = \cos(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2} \cos x. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2}e^{-x/2} \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int e^{(-\frac{1}{2}+i)x} \, dx \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(-\frac{1}{2}+i)x}}{-\frac{1}{2}+i} \right) + C = \frac{1}{5}e^{-x/2} \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)(-1 - 2i)) + C \\ &= \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2 \sin x) + C. \end{aligned}$$

Par suite, on peut prendre $\lambda(x) = \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2 \sin x)$ ce qui fournit la solution particulière $f_0(x) = \frac{1}{5}(-\cos x + 2 \sin x)$.

3) Puisque les fonctions $x \mapsto -2$ et $x \mapsto xe^{2x}$ sont continues sur \mathbb{R} , l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (e^{-2x}f)'(x) = x \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x}f(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda \right) e^{2x}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda \right) e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

4) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $z^2 - 4z + 4 = 0$ et admet $z_0 = 2$ pour racine double. On sait que les solutions de (E_H) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Puisque 2 est racine double de l'équation caractéristique, l'équation $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ admet une solution particulière f_0 de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = ax^2 e^{2x}$, $a \in \mathbb{R}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x ,

$$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 4f_0(x) = a(4x^2 + 8x + 2)e^{2x} - 4a(2x^2 + 2x)e^{2x} + 4ax^2 e^{2x} = 2ae^{2x},$$

et f_0 est solution de (E) sur \mathbb{R} si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu \right) e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ est $z^2 + 4 = 0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1 = 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -2i$. On sait que les solutions de (E_H) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Une solution réelle de l'équation $y'' + 4y = \cos(2x)$ est la partie réelle d'une solution de l'équation $y'' + 4y = e^{2ix}$. Puisque le nombre $2i$ est racine simple de (E_c), cette dernière équation admet une solution de la forme $f_1 : x \mapsto axe^{2ix}$, $a \in \mathbb{C}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x ,

$$f_1''(x) + 4f_1(x) = a((-4x + 4i)e^{2ix} + 4xe^{2ix}) = 4iae^{2ix}.$$

et f_1 est solution de $y'' + 4y = e^{2ix}$ si et seulement si $a = \frac{1}{4i}$. On obtient $f_1(x) = \frac{1}{4i}xe^{2ix} = \frac{1}{4}x(-i \cos(2x) + \sin(2x))$ ce qui fournit une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{1}{4}x \sin(2x)$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{4}x \sin(2x) + \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

6) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation (E_H) est $z^2 + 2z + 2 = 0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i$. On sait que les solutions de (E_H) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Pour tout réel x , $\cos(x) \operatorname{ch}(x) = \operatorname{Re}(e^{ix} \operatorname{ch}(x)) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x})$. Notons (E_1) l'équation $y'' + 2y' + 2y = e^{(1+i)x}$ et (E_2) l'équation $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$. Si f_1 est une solution de (E_1) et f_2 est une solution de (E_2) alors $f_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f_1 + f_2)$ est une solution de (E) sur \mathbb{R} d'après le principe de superposition des solutions.

• (E_1) admet une solution particulière de la forme $f_1 : x \mapsto ae^{(1+i)x}$, $a \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x ,

$$f_1''(x) + 2f_1'(x) + 2f_1(x) = a((1+i)^2 + 2(1+i) + 2)e^{(1+i)x} = a(4+4i)e^{(1+i)x}$$

et f_1 est solution de (E_1) sur \mathbb{R} si et seulement si $a = \frac{1}{4+4i} = \frac{1-i}{8}$. On obtient $f_1(x) = \frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}$.

• (E_2) admet une solution particulière de la forme $f_2 : x \mapsto axe^{(-1+i)x}$, $a \in \mathbb{C}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x ,

$$f_2''(x) + 2f_2'(x) + 2f_2(x) = a((-1+i)^2 x + 2(-1+i)) + 2((-1+i)x + 1) + 2x)e^{(-1+i)x} = 2iae^{(-1+i)x}$$

et f_2 est solution de (E_2) sur \mathbb{R} si et seulement si $a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$. On obtient $f_2(x) = -\frac{i}{2}e^{(-1+i)x}$.

• Une solution particulière f_0 de (E) sur \mathbb{R} est donc définie pour tout réel x par

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1-i}{8} e^{(1+i)x} - \frac{i}{2} e^{(-1+i)x} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{8} (1-i)(\cos(x) + i \sin(x)) e^x - \frac{i}{2} (\cos(x) + i \sin(x)) e^{-x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} (\cos(x) + \sin(x)) e^x + \frac{1}{2} \sin(x) e^{-x} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{16}(\cos(x) + \sin(x))e^x + \frac{1}{4}\sin(x)e^{-x} + (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice n° 2

1) Posons $g = f' + \alpha f$. La fonction g est continue sur \mathbb{R} et la fonction f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' + \alpha y = g$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$. Ensuite,

$$\begin{aligned} f' + \alpha f = g &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{\alpha x} f'(x) + \alpha e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} g(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (e^{\alpha x} f)'(x) = e^{\alpha x} g(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{\alpha x} f(x) = f(0) + \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt. \end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ et que $|e^{-\alpha x}| = e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(0)e^{-\alpha x} = 0$. Vérifions alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt = \frac{\ell}{\alpha}$ sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

On suppose tout d'abord $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A_1 > 0$ tel que $\forall t \geq A_1, |g(t)| \leq \frac{\varepsilon \operatorname{Re}(\alpha)}{2}$. Pour $x \geq A_1$,

$$\begin{aligned} \left| e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt \right| &\leq e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \left| \int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t) dt \right| + e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \int_{A_1}^x e^{\operatorname{Re}(\alpha)t} |g(t)| dt \\ &\leq e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \left| \int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t) dt \right| + e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \int_{A_1}^x e^{\operatorname{Re}(\alpha)t} \times \frac{\varepsilon \operatorname{Re}(\alpha)}{2} dt \\ &= e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \left| \int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} (1 - e^{-\operatorname{Re}(\alpha)(x-A_1)}) \\ &\leq e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \left| \int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \left| \int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t) dt \right| = 0$ et donc il existe $A \geq A_1$ tel que $\forall x \geq A, e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \left| \int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $x \geq A$, on a $\left| e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a ainsi montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \frac{\ell}{\alpha}$.

On revient maintenant au cas général ℓ quelconque.

$$\begin{aligned} f' + \alpha f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell &\Rightarrow f' + \alpha f - \ell \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \left(f - \frac{\ell}{\alpha} \right)' + \alpha \left(f - \frac{\ell}{\alpha} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ &\Rightarrow f - \frac{\ell}{\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{\alpha}. \end{aligned}$$

$$\forall f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\ell}{\alpha}.$$

2) $f'' + f' + f = (f' - jf)' - j^2(f' - jf)$. D'après 1), comme $\operatorname{Re}(-j^2) = \operatorname{Re}(-j) = \frac{1}{2} > 0$,

$$f'' + f' + f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow (f' - jf)' - j^2(f' - jf) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow f' - jf \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\forall f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow +\infty} (f''(x) + f'(x) + f(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3) Montrons le résultat par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$, c'est le 1) dans le cas particulier $\ell = 0$ (si $P = X - \alpha$, $P(D)(f) = f' - \alpha f$ avec $\operatorname{Re}(-\alpha) > 0$).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat acquis pour n . Soit P un polynôme de degré $n + 1$ dont les racines ont des parties réelles strictement négatives et tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(D))(f)(x) = 0$. Soit α une racine de P . P s'écrit $P = (X - \alpha)Q$ où Q est un polynôme dont les racines ont toutes une partie réelle strictement négative. Puisque

$$P(D)(f) = ((D - \alpha \text{Id}) \circ (Q(D)))(f) = (Q(D)(f))' - \alpha(Q(D)(f)) \xrightarrow{+\infty} 0,$$

on en déduit que $Q(D)(f) \xrightarrow{+\infty} 0$ d'après le cas $n = 1$ puis que $f \xrightarrow{+\infty} 0$ par hypothèse de récurrence.

Le résultat est démontré par récurrence.

Exercice n° 3

On pose $g = f + f''$. Par hypothèse, la fonction g est une application continue et positive sur \mathbb{R} et de plus, la fonction f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + y = g$ sur \mathbb{R} . Résolvons cette équation différentielle, notée (E), sur \mathbb{R} . Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. D'après la méthode de variation des constantes, il existe une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} de la forme $f_0 : x \mapsto \lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x)$ où de plus les fonctions λ et μ sont solutions du système

$$\begin{cases} \lambda' \cos(x) + \mu' \sin(x) = 0 \\ -\lambda' \sin(x) + \mu' \cos(x) = g \end{cases}.$$

Les formules de CRAMER fournissent $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda'(x) = -g(x) \sin(x)$ et $\mu'(x) = g(x) \cos(x)$. On peut alors prendre $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = -\int_0^x g(t) \sin(t) dt$ et $\mu(x) = \int_0^x g(t) \cos(t) dt$ puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = -\cos(x) \int_0^x g(t) \sin(t) dt + \sin(x) \int_0^x g(t) \cos(t) dt = \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt.$$

Ainsi, les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f est l'une de ces solutions. Par suite, il existe $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda_0 \cos(x) + \mu_0 \sin(x) + \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt$ et donc pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x) + f(x + \pi) &= \int_0^{x+\pi} g(t) \sin(x + \pi - t) dt + \int_0^x g(t) \sin(x - t) dt = -\int_0^{x+\pi} g(t) \sin(x - t) dt + \int_0^x g(t) \sin(x - t) dt \\ &= \int_x^{x+\pi} g(t) \sin(t - x) dt = \int_0^\pi g(u + x) \sin(u) du \geq 0. \end{aligned}$$

On a montré que si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f''(x) \geq 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

Exercice n° 4

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

1) On note J l'un des deux intervalles $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Sur J, l'équation (E) s'écrit encore $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Comme la fonction $x \mapsto -\frac{2}{x}$ est continue sur J, les solutions de (E) sur J constituent un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 1. Enfin, la fonction $x \mapsto x^2$ est une solution non nulle de (E) sur J et donc $\mathcal{S}_J = \{x \mapsto \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur \mathbb{R} . Nécessairement, $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda_2 x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

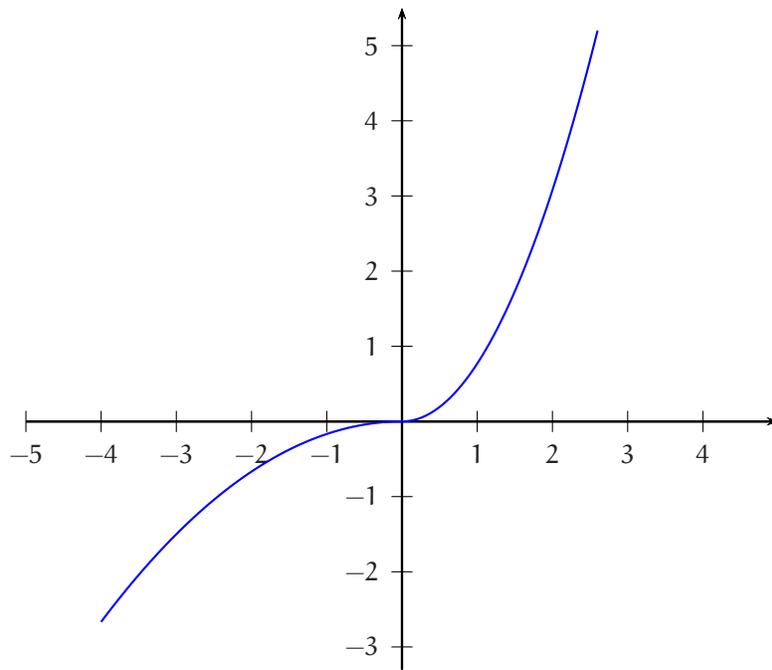
Réciproquement, une telle fonction f est définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* , solution de (E) sur \mathbb{R}^* et vérifie encore l'équation (E) en 0 si de plus elle est dérivable en 0. Donc, une telle fonction est solution de (E) sur \mathbb{R} si et seulement si elle est dérivable en 0.

Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 pour tout choix de λ_1 et λ_2 et donc f est solution de (E) sur \mathbb{R} pour tout choix de λ_1 et λ_2 .

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda_2 x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On note que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2. En effet, pour toute solution f de (E) sur \mathbb{R} , $f(x) = \lambda_1 \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} + \lambda_2 \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$. Donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect}(f_1, f_2)$ avec (f_1, f_2) clairement libre.

Un exemple de graphe de solution est donné à la page suivante.



2) L'ensemble des solutions sur $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ est $\{x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur \mathbb{R} . Nécessairement, $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda_2 x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur \mathbb{R} si et seulement si elle est dérivable en 0. Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$ et donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Dans ce cas, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 1.

3) L'ensemble des solutions sur $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ est $\{x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur \mathbb{R} . Nécessairement, $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur \mathbb{R} si et seulement si elle est dérivable en 0. Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{0\}.$$

Dans ce cas, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 0.

4) Soit f une fonction dérivable sur $I =]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, x f'(x) - 2f(x) = x^3 \Leftrightarrow \forall x \in I, \frac{1}{x^2} f'(x) - \frac{2}{x^3} f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \left(\frac{1}{x^2} f \right)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, \frac{f(x)}{x^2} = x + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, \frac{f(x)}{x^2} = x + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = x^3 + \lambda x^2. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{]0, +\infty[} = \{x \mapsto x^3 + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

5) Si f est une solution sur \mathbb{R} de l'équation $x^2 y' + 2xy = 1$ alors $0^2 \times f'(0) + 0 \times f(0) = 1$ ce qui est impossible. Donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \emptyset.$$

6) • Résolution sur $] -\infty, 0[$, $] 0, 1[$ et $] 1, +\infty[$. Soit I l'un des trois intervalles $] -\infty, 0[$, $] 0, 1[$ ou $] 1, +\infty[$. Sur I , l'équation (E) s'écrit encore $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1-x)}$. Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2x(1-x)}$ sont continues sur I , les solutions de (E) sur I constituent un \mathbb{R} -espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I . Pour $x \in I$, on note ε le signe de x sur I .

$$f \text{ solution de (E) sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) + \frac{1}{2x}f(x) = \frac{1}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in I, e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}f'(x) + \frac{1}{2x}e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}}{2x(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, (\sqrt{\varepsilon x} f)'(x) = \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in I, (\sqrt{\varepsilon x} f)'(x) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}.$$

Déterminons alors les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}$ sur I . En posant $u = \sqrt{\varepsilon x}$ et donc $x = \varepsilon u^2$ puis $du = 2\varepsilon u du$.

$$\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)} dx = \int \frac{\varepsilon}{2u(1-\varepsilon u^2)} 2\varepsilon u du = \int \frac{1}{1-\varepsilon u^2} du.$$

-Résolution sur $] -\infty, 0[$.

Dans ce cas, $\varepsilon = -1$ puis $\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)} dx = \int \frac{1}{1+u^2} du = \text{Arctan}(u) + \lambda = \text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda$. Par suite,

$$f \text{ solution de (E) sur }] -\infty, 0[\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in] -\infty, 0[, \sqrt{-x}f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in] -\infty, 0[, f(x) = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda}{\sqrt{-x}}.$$

$$\mathcal{S}_{]-\infty, 0[} = \left\{ x \mapsto \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda}{\sqrt{-x}}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

-Résolution sur $] 0, 1[$ ou $] 1, +\infty[$.

Dans ce cas, $\varepsilon = 1$ puis $\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)} dx = \int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| + \lambda$. Par suite,

-Résolution sur $] 0, 1[$ et $] 1, +\infty[$.

$$\mathcal{S}_{]0, 1[} = \left\{ x \mapsto \frac{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + \lambda}{\sqrt{x}}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{S}_{]1, +\infty[} = \left\{ x \mapsto \frac{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) + \lambda}{\sqrt{x}}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

-Résolution sur $] 0, +\infty[$ et sur \mathbb{R} . Si f est une solution de (E) sur $] 0, +\infty[$ ou sur \mathbb{R} , alors $0 \times f'(1) + 0 \times f(1) = 1$ ce qui est impossible. Donc

$$\mathcal{S}_{]0, +\infty[} = \emptyset \text{ et } \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \emptyset.$$

-Résolution sur $] -\infty, 1[$. Si f est une solution de (E) sur $] -\infty, 1[$, alors il existe nécessairement $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in] -\infty, 1[, f(x) = \begin{cases} \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda_1}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + \lambda_2}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

. Réciproquement une telle fonction est solution si et

seulement si elle est dérivable en 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \left(\lambda_1 + \sqrt{-x} - \frac{(\sqrt{-x})^3}{3} + o((\sqrt{-x})^3) \right) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}} + 1 + \frac{x}{3} + o(x) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}} + f(0) + \frac{x}{3} + o(x).$$

et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\lambda_2 + \frac{1}{2} (\ln(1 + \sqrt{x}) - \ln(1 - \sqrt{x})) \right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\lambda_2 + \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^3}{3} + o((\sqrt{x})^3) \right) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{x}} + 1 + \frac{x}{3} + o(x) \\ &= \frac{\lambda_2}{\sqrt{x}} + f(0) + \frac{x}{3} + o(x). \end{aligned}$$

Par suite, f est dérivable à droite et à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et dans ce cas, quand x tend vers 0, $f(x) = f(0) + \frac{x}{3} + o(x)$ ce qui montre que f est dérivable en 0. En résumé, f est solution de (E) sur $] -\infty, 1[$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$\mathcal{S}_{]-\infty, 1[} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \right\}.$$

7) Résolution de (E) sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Soit I l'un des deux intervalles $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. On note ε le signe de x sur I . Sur I , (E) s'écrit encore $y' + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = \varepsilon x^2$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto \varepsilon \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto \varepsilon x^2$ sont continues sur I , les solutions de (E) sur I constituent un \mathbb{R} -espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{x}\right) f(x) = \varepsilon x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, e^{\varepsilon x - \varepsilon \ln(\varepsilon x)} f'(x) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\varepsilon x - \varepsilon \ln(\varepsilon x)} f(x) = \varepsilon x^2 e^{\varepsilon x - \varepsilon \ln(\varepsilon x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, ((\varepsilon x)^{-\varepsilon} e^{\varepsilon x} f)'(x) = x^{-\varepsilon} x^2 e^{\varepsilon x} \end{aligned}$$

• Si $I =]0, +\infty[$, $\varepsilon = 1$ et

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, \left(\frac{e^x}{x} f\right)'(x) = x e^x \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, +\infty[, \frac{e^x}{x} f(x) = (x-1)e^x + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x^2 - x + \lambda x e^{-x}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{]0, +\infty[} = \left\{ x \mapsto x^2 - x + \lambda x e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Si $I =]-\infty, 0[$, $\varepsilon = -1$ et

$$f \text{ solution de (E) sur }]-\infty, 0[\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty, 0[, (-x e^{-x} f)'(x) = x^3 e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty, 0[, (x e^{-x} f)'(x) = -x^3 e^{-x}.$$

$$\text{Or, } \int -x^3 e^{-x} dx = x^3 e^{-x} - 3 \int x^2 e^{-x} dx = (x^3 + 3x^2) e^{-x} - 6 \int x e^{-x} dx = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) e^{-x} + \lambda \text{ et donc}$$

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur }]-\infty, 0[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in]-\infty, 0[, x e^{-x} f(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) e^{-x} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6 + \lambda e^x}{x}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{]0, +\infty[} = \left\{ x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6 + \lambda e^x}{x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Résolution de (E) sur \mathbb{R} . Si f est une solution de (E) sur \mathbb{R} , nécessairement il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \lambda_1 x e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \frac{6 + \lambda_2 e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x + \lambda_1 x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \frac{6 + \lambda_2 e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} . \text{ Réciproquement, une telle fonction est}$$

solution sur \mathbb{R} si et seulement si elle est dérivable en 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = -x + o(x) + \lambda_1 x(1 + o(1)) = (\lambda_1 - 1)x + o(x)$. Par suite, f est dérivable à droite en 0 pour tout choix de λ_1 et $f'_d(0) = \lambda_1 - 1$.

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x) = 6 + 3x + o(x) + \frac{6 + \lambda_2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x} = \frac{6 + \lambda_2}{x} + 6 + \lambda_2 + \left(3 + \frac{\lambda_2}{2}\right)x + o(x)$$

Par suite, f est dérivable à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_2 = -6$. Dans ce cas, quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $f(x) = o(x)$ et $f'_g(0) = 0$. Maintenant, f est dérivable en 0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = f'_g(0)$. Ceci équivaut à $\lambda_2 = -6$ et $\lambda_1 = 1$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} x^2 - x + x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \frac{6(1 - e^x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \right\} .$$

Exercice n° 5

- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = (-1)^{n-1} \frac{C_{2n}^n}{2n-1}$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} \times \frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{2(2n-1)}{n+1} .$$

Par suite, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 4$ et d'après la règle de d'ALEMBERT, $R_a = \frac{1}{4}$. Pour x tel que la série converge, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{C_{2n}^n}{2n-1} x^n .$$

- Soit $x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)a_{n+1} + 4na_n = 2a_n$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on multiplie les deux membres

de cette égalité par x^n puis on somme sur n . On obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ou encore $(1+4x)f'(x) = 2f(x)$. De plus $f(0) = a_0 = 1$. Mais alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, (1+4x)f'(x) = 2f(x) &\Rightarrow \forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, e^{-\frac{1}{2} \ln(1+4x)} f'(x) - \frac{2}{1+4x} e^{-\frac{1}{2} \ln(1+4x)} f(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, \left(\frac{f}{\sqrt{1+4x}} \right)'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, \frac{f(x)}{\sqrt{1+4x}} = \frac{f(0)}{\sqrt{1+0}} \\ &\Rightarrow \forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, f(x) = \sqrt{1+4x} . \end{aligned}$$

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2n-1} x^n = \sqrt{1+4x} .$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$. D'après la formule de STIRLING,

$$u_n = \frac{(2n)!}{n!^2 (2n-1)4^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (2\pi n)(2n)4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}^{3/2}} .$$

Par suite, la série numérique de terme général $(-1)^{n-1} \frac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n} = (-1)^{n-1} u_n$ converge absolument et donc converge.

• La fonction f est donc définie en $\frac{1}{4}$. Vérifions que f est continue en $\frac{1}{4}$.

Pour $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = a_n x^n = (-1)^{n-1} \frac{C_{2n}^n}{2n-1} x^n$. Pour chaque x de $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et la suite $((-1)^{n-1} f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir du rang 1. Ensuite, pour $n \geq 1$ et $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$,

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| x = \frac{2(2n-1)}{n+1} x \leq \frac{2(2n-1)}{n+1} \times \frac{1}{4} = \frac{4n-2}{4n+4} < 1.$$

On en déduit que pour chaque x de $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, la suite numérique $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît à partir du rang 1. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n \geq 1$ et $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| = |a_{n+1}| x^{n+1} \leq \frac{|a_{n+1}|}{4^{n+1}} = u_{n+1},$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Sup} \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right|, x \in \left]0, \frac{1}{4}\right] \right\} \leq u_{n+1}$. Puisque la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on

a montré que la série de fonction de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $\left]0, \frac{1}{4}\right]$. Puisque chaque fonction f_n est continue sur $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, f est continue sur $\left]0, \frac{1}{4}\right]$ et en particulier en $\frac{1}{4}$.

Mais alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} C_{2n}^n}{(2n-1)4^n} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{4}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{4}}} \sqrt{1+4x} = \sqrt{1+4 \times \frac{1}{4}} = \sqrt{2}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} C_{2n}^n}{(2n-1)4^n} = \sqrt{2}.$$

Exercice n° 6

1) Posons $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\chi_A = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ puis $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(2, 3)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puis $X_1 = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases} \Leftrightarrow X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \Leftrightarrow X_1' = DX_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ y_1' = 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1(t) = ae^{2t} \\ y_1(t) = be^{3t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + 2be^{3t} \\ ae^{2t} + be^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{2t} + 2be^{3t} \\ ae^{2t} + be^{3t} \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2) Puisque la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, les solutions réelles sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ du système proposé constituent un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ et en particulier A est diagonalisable dans \mathbb{C} . Un vecteur propre de A associé à la valeur propre i est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$ et un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-i$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$. On sait alors que les solutions complexes sur \mathbb{R} du système homogène associé sont les fonctions de la forme $X : t \mapsto ae^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} + be^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Déterminons alors les solutions réelles du système homogène.

$$\begin{aligned} X \text{ réelle} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, ae^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} + be^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} = \bar{a}e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} + \bar{b}e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow b = \bar{a} \text{ (car la famille de fonctions } (e^{it}, e^{-it}) \text{ est libre.)} \end{aligned}$$

Les solutions réelles sur \mathbb{R} du système homogène sont les fonctions de la forme $X : t \mapsto ae^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} + \bar{a}e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} = 2\operatorname{Re} \left(ae^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} \right)$, $a \in \mathbb{C}$. En posant $a = \lambda + i\mu$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$2\operatorname{Re} \left(ae^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} \right) = 2\operatorname{Re} \left(\begin{pmatrix} (\lambda + i\mu)(\cos t + i \sin t) \\ (\lambda + i\mu)(1 - i)(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} \right) = 2 \begin{pmatrix} \lambda \cos t - \mu \sin t \\ \lambda(\cos t + \sin t) + \mu(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, le couple (λ, μ) décrit \mathbb{R}^2 si et seulement si le couple $(2\lambda, 2\mu)$ décrit \mathbb{R}^2 et en renommant les constantes λ et μ , on obtient les solutions réelles du système homogène : $t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Résolution du système. D'après la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

telles que pour tout réel t de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\lambda'(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$. Les formules de

CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{\cos t}(\cos t - \sin t) = 1 - \frac{\sin t}{\cos t}$ et $\mu'(t) = -\frac{1}{\cos t}(\cos t + \sin t) = -1 - \frac{\sin t}{\cos t}$. On peut prendre $\lambda(t) = t + \ln(\cos t)$ et $\mu(t) = -t + \ln(\cos t)$ et on obtient la solution particulière

$$X(t) = (t + \ln(\cos t)) \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + (-t + \ln(\cos t)) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(\cos t + \sin t) + \ln(\cos t)(\cos t - \sin t) \\ 2t \sin t + 2 \cos t \ln(\cos t) \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{S}]_{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} t(\cos t + \sin t) + \ln(\cos t)(\cos t - \sin t) + \lambda \cos t - \mu \sin t \\ 2t \sin t + 2 \cos t \ln(\cos t) + \lambda(\cos t + \sin t) + \mu(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3) Puisque la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$ est continue sur \mathbb{R} , les solutions sur \mathbb{R} du système proposé constituent un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2 - 11\lambda + 28 = (\lambda - 4)(\lambda - 7)$. Un vecteur propre de tA associé à la valeur propre 4 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre de tA associé à la valeur propre 7 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs fournissent des combinaisons linéaires intéressantes des équations :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)' = 4(x+y) + e^t + t \\ (x-2y)' = 7(x-2y) + e^t - 2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) + y(t) = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + \lambda e^{4t} \\ x(t) - 2y(t) = -\frac{e^t}{6} + \frac{2t}{7} + \frac{2}{49} + \mu e^{7t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = -\frac{5e^t}{18} - \frac{3t}{42} - \frac{33}{1176} + \frac{2\lambda e^{4t} + \mu e^{4t}}{3} \\ y(t) = -\frac{e^t}{6} - \frac{3t}{28} - \frac{1176}{1176} + \frac{\lambda e^{4t} - \mu e^{7t}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

4) Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) + 2(-\lambda) - (-\lambda + 2) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 26\lambda - 12 \\ &= (\lambda - 6)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = (\lambda - 6)(\lambda - 2 + \sqrt{2})(\lambda - 2 - \sqrt{2}), \end{aligned}$$

et en particulier A est diagonalisable dans \mathbb{R} .

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(A - 6I) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0 \text{ et } x = y.$$

$\text{Ker}(A - 6I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(A - (2 + \sqrt{2})I) &\Leftrightarrow \begin{cases} (3 - \sqrt{2})x + y - z = 0 \\ 2x + (2 - \sqrt{2})y - 2z = 0 \\ x - y - (1 + \sqrt{2})z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = (3 - \sqrt{2})x + y \\ 2x + (2 - \sqrt{2})y - 2((3 - \sqrt{2})x + y) = 0 \\ x - y - (1 + \sqrt{2})((3 - \sqrt{2})x + y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = (3 - \sqrt{2})x + y \\ (-4 + 2\sqrt{2})x - \sqrt{2}y = 0 \\ -2\sqrt{2}x - (2 + \sqrt{2})y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (-2\sqrt{2} + 2)x \\ z = (3 - \sqrt{2})x + (-2\sqrt{2} + 2)x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = (2 - 2\sqrt{2})x \\ z = (5 - 3\sqrt{2})x \end{cases}. \end{aligned}$$

$\text{Ker}(A - (2 + \sqrt{2})I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2 - 2\sqrt{2}, 5 - 3\sqrt{2})$. Un calcul conjugué montre alors que $\text{Ker}(A - (2 - \sqrt{2})I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2 + 2\sqrt{2}, 5 + 3\sqrt{2})$.

On sait alors que les solutions du système homogène $t \mapsto \mathbf{a}e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b}e^{(2+\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2\sqrt{2} \\ 5-3\sqrt{2} \end{pmatrix} + \mathbf{c}e^{(2-\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2\sqrt{2} \\ 5+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^3$.

5) Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda - 1)^3$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON permet alors d'affirmer que $(A - I_3)^3 = 0$.

On sait que les solutions du système $X' = AX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{tA}X_0$ où $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Or, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{t(A-I)} \times e^{tI} \text{ (car les matrices } t(A-I) \text{ et } tI \text{ commutent)} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} (A-I)^n \right) \times e^{tI} = e^t \left(\sum_{n=0}^2 \frac{t^n}{n!} (A-I)^n \right) \\
&= e^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= e^t \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ t & t & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les solutions du système sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{tA} X_0 = e^t \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ t & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+(a+b)t)e^t \\ (b-(a+b)t)e^t \\ ((a+b)t+c)e^t \end{pmatrix}$,
 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Maintenant,

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

La solution cherchée est $t \mapsto \begin{pmatrix} te^t \\ (1-t)e^t \\ (t-1)e^t \end{pmatrix}$.

Exercice n° 7

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = \|X(t)\|_2^2 = (X(t)|X(t))$. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel t

$$g'(t) = 2(X(t)|X'(t)) = 2(X(t)|AX(t)) = 2^t X(t)AX(t) \geq 0.$$

Ainsi, la fonction g est croissante sur \mathbb{R} et il en est de même de la fonction $\sqrt{g} : t \mapsto \|X(t)\|_2$.

Exercice n° 8

1) Puisque les fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ du système proposé est un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Le couple de fonctions $(x, y) = (1, t)$ est solution du système homogène associé sur $]0, +\infty[$. Pour chaque réel strictement positif t , les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une base de

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Cherchons alors les solutions du système homogène sous la forme $t \mapsto \alpha(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \beta(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ t\alpha(t) + \beta(t) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x' = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t^2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2t}y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = -\frac{1}{2t}\alpha + \frac{1}{2t^2}(t\alpha + \beta) \\ t\alpha' + \alpha + \beta' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2t}(t\alpha + \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \\ t\alpha' + \beta' = \frac{\beta}{2t} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \\ \frac{\beta}{2t} + \beta' = \frac{\beta}{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta' = 0 \\ \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t \in]0, +\infty[, \begin{cases} \beta(t) = \lambda \\ \alpha'(t) = \frac{\lambda}{2t^2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in]0, +\infty[, \begin{cases} \beta(t) = \lambda \\ \alpha(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in]0, +\infty[, \begin{cases} x(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu \\ y(t) = \frac{\lambda}{2} + \mu t \end{cases}
\end{aligned}$$

Maintenant, pour tout réel strictement positif t , $w(t) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2t} & 1 \\ \frac{1}{2} & t \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ et donc les deux fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ sont deux solutions indépendantes du système homogène sur $]0, +\infty[$. Les solutions sur $]0, +\infty[$ du système homogène sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.

Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variations des constantes.

Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que pour tout réel strictement positif t , $\lambda'(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2t & 1 \\ t^2 & t \end{vmatrix} = -t^2$ et $\mu'(t) = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2t} & 2t \\ \frac{1}{2} & t^2 \end{vmatrix} = \frac{3t}{2}$. On peut prendre $\lambda(t) = -\frac{t^3}{3}$ et

$$\mu(t) = \frac{3t^2}{4} \text{ et on obtient la solution particulière } X(t) = -\frac{t^3}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{3t^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11t^2/12 \\ 7t^3/12 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S}_{]0, +\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{11t^2}{12} - \frac{\lambda}{2t} + \mu \\ \frac{7t^3}{12} + \frac{\lambda}{2} + \mu t \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2) Puisque les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$ sont continues sur \mathbb{R} , l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} du système proposé est un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Les couples de fonctions $X_1 = (t, -1)$ et $X_2 = (1, t)$ sont solutions du système homogène associé sur \mathbb{R} . De plus, pour chaque réel t , $w(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0$. Le couple de fonctions

(X_1, X_2) est donc un système fondamental de solutions sur \mathbb{R} du système homogène $X' = AX$. Les fonctions solutions du système homogène $X' = AX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variation de la constante.

Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t) \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} telles que pour tout réel t , $\lambda'(t) \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER

fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{vmatrix} (2t^2-1)/(t^2+1) & 1 \\ 3t/(t^2+1) & t \end{vmatrix} = \frac{2t^3+2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2t}{t^2+1}$ et $\mu'(t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{vmatrix} t & (2t^2-1)/(t^2+1) \\ -1 & 3t/(t^2+1) \end{vmatrix} = \frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2}$. On peut déjà prendre $\lambda(t) = \frac{1}{2} \ln(t^2+1)$. Ensuite, $\int \frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2} dt = 5 \int \frac{1}{t^2+1} dt - 6 \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$ puis

$$\int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{t}{t^2+1} - \int t \times \frac{-2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{t}{t^2+1} + 2 \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2} dt = \frac{t}{t^2+1} + 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt - 2 \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt,$$

et donc $\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t^2+1} + \text{Arctan } t \right) + C$. On peut prendre $\mu(t) = -\frac{3t}{t^2+1} + 2 \text{Arctan } t$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \ln(1+t^2) - \frac{3t}{t^2+1} + 2 \text{Arctan } t + \lambda t + \mu \\ -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \frac{3t^2}{t^2+1} + 2t \text{Arctan } t - \lambda + \mu t \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3) Si de plus $y = \frac{1}{x}$, le système s'écrit $\begin{cases} \text{sh}(2t)x' = \text{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ -\text{sh}(2t)\frac{x'}{x^2} = -x + \text{ch}(2t)\frac{1}{x} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \text{sh}(2t)x' = \text{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ \text{sh}(2t)x' = x^3 - \text{ch}(2t)x \end{cases}$. On obtient

$x^3 - \text{ch}(2t)x = \text{ch}(2t)x - \frac{1}{x}$ ou encore $x^4 - 2 \text{ch}(2t)x^2 + 1 = 0$. Ensuite,

$$x^4 - 2 \text{ch}(2t)x^2 + 1 = (x^2 - \text{ch}(2t))^2 - \text{sh}^2(2t) = (x^2 - e^{2t})(x^2 - e^{-2t}) = (x - e^t)(x + e^t)(x - e^{-t})(x + e^{-t}).$$

Ainsi, nécessairement $(x, y) \in \{(e^t, e^{-t}), (e^{-t}, e^t), (-e^t, -e^{-t}), (-e^{-t}, e^t)\}$. Réciproquement, si $(x, y) = (e^t, e^{-t})$,

$$\text{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) - e^{-t} = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^t = \text{sh}(2t)e^t = \text{sh}(2t)x'$$

et

$$-x + \text{ch}(2t)y = -e^t + \frac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) = \frac{1}{2}(-e^t + e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^{-t} = -\text{sh}(2t)e^{-t} = \text{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_1 = (x, y) = (e^t, e^{-t})$ est une solution non nulle du système. De même, si $(x, y) = (e^{-t}, e^t)$,

$$\text{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) - e^t = \frac{1}{2}(-e^t - e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^{-t} = -\text{sh}(2t)e^{-t} = \text{sh}(2t)x'$$

et

$$-x + \text{ch}(2t)y = -e^{-t} + \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^t = \text{sh}(2t)e^t = \text{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_2 = (x, y) = (e^{-t}, e^t)$ est une solution non nulle du système. Enfin, $w(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-t} & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} - e^{-2t} = 2 \text{sh}(2t) \neq 0$ et le couple (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions sur $]0, +\infty[$.

$$\mathcal{S}_{]0, +\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^t + \mu e^{-t} \\ \lambda e^{-t} + \mu e^t \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice n° 9

1) Sur $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$, (E) s'écrit $y'' + \frac{4x-2}{2x+1}y' - \frac{8}{2x+1}y = 0$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto \frac{4x-2}{2x+1}$ et $x \mapsto -\frac{8}{2x+1}$ sont continues sur I , les solutions de (E) sur I forment un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2.

Recherche d'une solution polynomiale non nulle de (E). Soit P un éventuel polynôme non nul solution de (E). On note n son degré. Le polynôme $Q = (2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P$ est de degré au plus n . De plus, le coefficient de X^n dans Q est $(4n-8)\text{dom}(P)$. Si P est solution de (E), on a nécessairement $(4n-8)\text{dom}(P) = 0$ et donc $n = 2$. Posons alors $P = aX^2 + bX + c$.

$$(2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P = (2X+1)(2a) + (4X-2)(2aX+b) - 8(aX^2 + bX + c) = -4bX + 2a - 2b - 8c$$

Par suite, P est solution de (E) sur I si et seulement si $-4b = 2a - 2b - 8c = 0$ ce qui équivaut à $b = 0$ et $a = 4c$. La fonction $f_1 : x \mapsto 4x^2 + 1$ est donc une solution non nulle de (E) sur I .

Recherche d'une solution particulière de la forme $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$(2x+1)(e^{\alpha x})'' + (4x-2)(e^{\alpha x})' - 8e^{\alpha x} = (\alpha^2(2x+1) + \alpha(4x-2) - 8)e^{\alpha x} = (2\alpha(\alpha+2)x + \alpha^2 - 2\alpha - 8)e^{\alpha x}$$

Par suite, f_α est solution de (E) sur I si et seulement si $2\alpha(\alpha+2) = \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$ ce qui équivaut à $\alpha = -2$. Ainsi, la fonction $f_2 : x \mapsto e^{-2x}$ est solution de (E) sur I .

Résolution de (E) sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$. Vérifions que le couple (f_1, f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$. Pour $x > -\frac{1}{2}$,

$$w(x) = \begin{vmatrix} 4x^2 + 1 & e^{-2x} \\ 8x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = (-8x^2 - 8x - 2)e^{-2x} = -2(2x+1)^2 e^{-2x} \neq 0.$$

Donc le couple (f_1, f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$ et

$$\mathcal{S}_{]-\frac{1}{2}, +\infty[} = \{x \mapsto \lambda(4x^2 + 1) + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Résolution de (E) sur \mathbb{R} . On a aussi $\mathcal{S}_{]-\infty, -\frac{1}{2}[} = \{x \mapsto \lambda(4x^2 + 1) + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Soit f une solution de (E)

sur \mathbb{R} . Nécessairement, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \lambda_1(4x^2 + 1) + \mu_1 e^{-2x} & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ \lambda_2(4x^2 + 1) + \mu_2 e^{-2x} & \text{si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$ (par

continuité à gauche en $-\frac{1}{2}$).

f ainsi définie est deux fois dérivable sur $] -\infty, -\frac{1}{2}[$ et sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$, solution de (E) sur chacun de ces deux intervalles et vérifie encore (E) en $x = -\frac{1}{2}$ si de plus f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$.

En résumé, f est solution de (E) sur \mathbb{R} si et seulement si f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$.

f est déjà deux fois dérivable à gauche en $-\frac{1}{2}$. De plus, en posant $h = x + \frac{1}{2}$ ou encore $x = -\frac{1}{2} + h$, on obtient quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures

$$f(x) = \lambda_1(2 - 4h + 4h^2) + \mu_1 e^{-2h} = (2\lambda_1 + e\mu_1) + (-4\lambda_1 - 2e\mu_1)h + (4\lambda_1 + 2e\mu_1)h^2 + o(h^2),$$

et de même quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures, $f(x) = (2\lambda_2 + e\mu_2) + (-4\lambda_2 - 2e\mu_2)h + (4\lambda_2 + 2e\mu_2)h^2 + o(h^2)$.

Par suite, f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$ si et seulement si $2\lambda_1 + e\mu_1 = 2\lambda_2 + e\mu_2$ ou encore $\mu_2 = \frac{2}{e}(\lambda_1 + \lambda_2) + \mu_1$.

Ainsi, les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \begin{cases} a(4x^2 + 1) + be^{-2x} & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ c(4x^2 + 1) + \left(\frac{2}{e}(a+c) - b\right)e^{-2x} & \text{si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$,

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi, l'espace des solutions sur \mathbb{R} est de dimension 3 et une base de cet espace est par exemple (f_1, f_2, f_3)

$$\text{où } f_1 : x \mapsto \begin{cases} 4x^2 + 1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{e}e^{-2x} & \text{si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}, f_2 : x \mapsto \begin{cases} e^{-2x} & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ -e^{-2x} & \text{si } x > -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ et } f_3 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 1 + \frac{2}{e}e^{-2x} & \text{si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

2) Sur $I =]0, +\infty[$, l'équation (E) s'écrit $y'' - \frac{2}{x+1}y' + \frac{2}{x(x+1)}y = 0$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto -\frac{2}{x+1}$ et $x \mapsto \frac{2}{x(x+1)}$ sont continues sur I , les solutions de (E) sur I forment un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2.

La fonction $f_1 : x \mapsto x$ est solution de (E) sur I . Posons alors $y = f_1 z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur I , la fonction y est deux fois dérivable sur I si et seulement si la fonction z est deux fois dérivable sur I . De plus, d'après la formule de LEIBNIZ,

$$\begin{aligned} (x^2 + x)y'' - 2y' + 2y &= (x^2 + x)(f_1''z + 2f_1'z' + f_1z'') - 2x(f_1'z + f_1z') + 2f_1z \\ &= (x^2 + x)f_1z'' + (2(x^2 + x)f_1' - 2xf_1)z' + ((x^2 + x)f_1'' - 2xf_1' + 2f_1)z \\ &= (x^3 + x^2)z'' + 2xz'. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, (x^3 + x^2)z''(x) + 2xz'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, z''(x) + \frac{2}{x(x+1)}z'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, \left(e^{2 \ln|x| - 2 \ln|x+1|}z'\right)'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, z'(x) = \lambda \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, z(x) = \lambda \left(x + 2 \ln|x| - \frac{1}{x}\right) + \mu \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, y(x) = \lambda(x^2 + 2x \ln|x| - 1) + \mu x. \end{aligned}$$

3) Cherchons les solutions développables en série entière. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière dont le rayon R est supposé à priori strictement positif. Pour $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} 4xf''(x) - 2f'(x) + 9x^2f(x) &= 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 9x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-3)a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-3)a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3} x^{n-1} \\ &= -2a_1 + 4a_2x + \sum_{n=3}^{+\infty} (2n(2n-3)a_n + 9a_{n-3}) x^{n-1} \end{aligned}$$

Par suite, f est solution de (E) sur $] -R, R[$ si et seulement si $a_1 = a_2 = 0$ et $\forall n \geq 3, 2n(2n-3)a_n + 9a_{n-3} = 0$ ce qui s'écrit encore

$$a_1 = a_2 = 0 \text{ et } \forall n \geq 3, a_n = -\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}.$$

Les conditions $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 3, a_n = -\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p \in \mathbb{N}, a_{3p+1} = 0$ et les conditions $a_2 = 0$ et $\forall n \geq 3, a_n = -\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p \in \mathbb{N}, a_{3p+2} = 0$.

Enfin les conditions $\forall p \in \mathbb{N}^*, a_{3p} = -\frac{9}{6p(6p-3)}a_{3p-3} = -\frac{1}{2p(2p-1)}a_{3(p-1)}$ sont équivalentes pour $p \geq 1$ à

$$a_{3p} = -\frac{1}{2p(2p-1)} \times -\frac{1}{(2p-2)(2p-3)} \times \dots \times -\frac{1}{2 \times 1} a_0 = \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_0.$$

En résumé, sous l'hypothèse $R > 0$, f est solution de (E) sur $] -R, R[$ si et seulement si $\forall x \in] -R, R[$, $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{3p}$.

Réciproquement, puisque pour tout réel x , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{3p} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées, $R = +\infty$ pour tout choix de a_0 ce qui valide les calculs précédents sur \mathbb{R} .

Les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{3n}$, $x \in \mathbb{R}$. Ensuite, pour $x > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^{3/2})^{2n} = \cos(x^{3/2}).$$

Donc la fonction $x \mapsto \cos(x^{3/2})$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. La forme de cette solution nous invite à changer de variable en posant $t = x^{3/2}$. Plus précisément, pour $x > 0$, posons $y(x) = z(x^{3/2}) = z(t)$. Puisque l'application $\varphi : x \mapsto x^{3/2}$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même, deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ ainsi que sa réciproque, la fonction y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si la fonction z est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour $x > 0$, on a $y(x) = z(x^{3/2})$ puis $y'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} z'(x^{3/2})$ puis $y''(x) = \frac{3}{4} x^{-1/2} z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4} x z''(x^{3/2})$ et donc

$$\begin{aligned} 4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2y(x) &= 4x \left(\frac{3}{4} x^{-1/2} z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4} x z''(x^{3/2}) \right) - 2 \left(\frac{3}{2} x^{1/2} z'(x^{3/2}) \right) + 9x^2 z(x^{3/2}) \\ &= 9x^2 (z''(x^{3/2}) + z(x^{3/2})). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de (E) sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0, 9x^2(z''(x^{3/2}) + z(x^{3/2})) = 0 \Leftrightarrow \forall t > 0, z''(t) + z(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t > 0, z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > 0, y(x) = \lambda \cos(x^{3/2}) + \mu \sin(x^{3/2}). \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{]0, +\infty[} = \{x \mapsto \lambda \cos(x^{3/2}) + \mu \sin(x^{3/2}), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

4) Puisque les fonctions $x \mapsto -\frac{2}{1+x}$, $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1+x}$ sont continues sur $] -1, +\infty[$, les solutions de (E) sur $] -1, +\infty[$ constituent un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2.

Résolution de l'équation homogène.

La fonction $f_1 : x \mapsto e^x$ est solution sur $] -1, +\infty[$ de l'équation $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0$. Posons alors $y = f_1 z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur $] -1, +\infty[$, la fonction y est deux fois dérivable sur $] -1, +\infty[$ si et seulement si la fonction z est deux fois dérivable sur $] -1, +\infty[$. De plus, la formule de LEIBNIZ permet d'écrire pour $x > -1$

$$\begin{aligned} (1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) &= (1+x)(f_1' z(x) + 2f_1(x)z'(x) + f_1(x)z''(x)) - 2(f_1'(x)z(x) + f_1(x)z'(x)) \\ &\quad + (1-x)f_1(x)z(x) \\ &= (1+x)f_1(x)z''(x) + (2(1+x)f_1'(x) - 2f_1(x))z'(x) = ((1+x)z''(x) + 2xz'(x))e^x. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de (E}_H) \text{ sur }] -1, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x > -1, (1+x)z''(x) + 2xz'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > -1, z''(x) + \left(2 - \frac{2}{1+x}\right)z'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > -1, e^{2x-2\ln(1+x)}z''(x) + \left(2 - \frac{2}{1+x}\right)e^{2x-2\ln(1+x)}z'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > -1, \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}z'\right)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > -1, z'(x) = \lambda(x+1)^2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \int (x+1)^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} + \int (x+1) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}(x+1) e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4} \right) e^{-2x} + C = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{5}{4} \right) e^{-2x} + C \\ &= -\frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 5) e^{-2x} + C \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_H) \text{ sur }]-1, +\infty[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > -1, z'(x) = \lambda(x+1)^2 e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > -1, z(x) = -\frac{\lambda}{4}(2x^2 + 6x + 5) e^{-2x} + \mu \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > -1, y(x) = -\frac{\lambda}{4}(2x^2 + 6x + 5) e^{-x} + \mu e^x. \end{aligned}$$

Maintenant, λ décrit \mathbb{R} si et seulement si $-\frac{\lambda}{4}$ décrit \mathbb{R} et en renommant la constante λ , les solutions de (E_H) sur $]-1, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda(2x^2 + 6x + 5)e^{-x} + \mu e^x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière de (E). Au vu du second membre, on peut chercher une solution particulière de la forme $f_0 : x \mapsto (ax + b)e^{-x}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (1+x)((ax+b)e^{-x})'' - 2((ax+b)e^{-x})' + (1-x)(ax+b)e^{-x} &= ((1+x)((ax+b) - 2a) - 2(-(ax+b) + a) \\ &\quad + (1-x)(ax+b))e^{-x} \\ &= (2ax + (4b - 4a))e^{-x}. \end{aligned}$$

Par suite, f_0 est solution de (E) sur $]-1, +\infty[$ si et seulement si $2a = 1$ et $4b - 4a = 0$ ce qui équivaut à $a = b = \frac{1}{2}$. Une solution de (E) sur $]-1, +\infty[$ est $x \mapsto \frac{x+1}{2} e^{-x}$.

$$\mathcal{S}_{]-1, +\infty[} = \left\{ x \mapsto \lambda(2x^2 + 6x + 5)e^{-x} + \mu e^x + \frac{x+1}{2} e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5) Puisque la fonction $x \mapsto \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur \mathbb{R} , les solutions de (E) sur \mathbb{R} constituent un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2.

L'équation caractéristique de l'équation homogène est $z^2 + 4z + 4 = 0$. Puisque cette équation admet -2 pour racine double, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu x e^{-2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} de la forme $x \mapsto \lambda(x) e^{-2x} + \mu(x) x e^{-2x}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\begin{cases} \lambda'(x) e^{-2x} + \mu'(x) x e^{-2x} = 0 \\ -2\lambda'(x) e^{-2x} + \mu'(x) (-2x+1) e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}.$$

Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(x) = \frac{1}{e^{-4x}} \begin{vmatrix} 0 & x e^{-2x} \\ \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} & (-2x+1) e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et

$\mu'(x) = \frac{1}{e^{-4x}} \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. On peut prendre $\lambda(x) = -\sqrt{x^2+1}$ et $\mu(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ puis

$$f_0(x) = \left(-\sqrt{x^2+1} + x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right) e^{-2x}.$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \left(\lambda + \mu x - \sqrt{x^2+1} + x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right) e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice n° 10

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = -f(-x) + e^x$. On en déduit que f' est dérivable sur \mathbb{R} ou encore que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x) = f'(-x) + e^x = -f(x) + e^{-x} + e^x,$$

et donc f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + y = 2 \operatorname{ch}(x)$. Par suite, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ch}(x) + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$.

Réciproquement, soit f une telle fonction. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) + f(-x) = (\operatorname{sh}(x) - \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)) + (\operatorname{ch}(x) + \lambda \cos(x) - \mu \sin(x)) = e^x + (\lambda + \mu)(\cos(x) - \sin(x)),$$

et f est solution si et seulement si $\lambda + \mu = 0$.

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \operatorname{ch}(x) + \lambda(\cos(x) - \sin(x))$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 11

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{3}{16x}\right)$. On en déduit que f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ ou encore que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x) = -\frac{3}{16x^2}f'\left(\frac{3}{16x}\right) = -\frac{3}{16x^2}f\left(\frac{3/16}{(3/16)/x}\right) = -\frac{3}{16x^2}f(x),$$

et donc f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $x^2y'' + \frac{3}{16}y = 0$ (E). Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ constituent un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2. Cherchons une solution particulière de (E) sur $]0, +\infty[$ de la forme $g_\alpha : x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ solution de (E) sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0, x^2\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + \frac{3}{16}x^\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{3}{16} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \text{ ou } \alpha = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Les deux fonctions $f_1 : x \mapsto x^{1/4}$ et $f_2 : x \mapsto x^{3/4}$ sont solutions de (E) sur $]0, +\infty[$. Le wronskien de ces solutions est

$$w(x) = \begin{vmatrix} x^{1/4} & x^{3/4} \\ \frac{1}{4}x^{-3/4} & \frac{3}{4}x^{-1/4} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ et donc } (f_1, f_2) \text{ est un système fondamental de solutions de (E) sur }]0, +\infty[. \text{ Ainsi,}$$

si f est solution du problème, nécessairement $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0$, $f(x) = \lambda_1 x^{1/4} + \lambda_2 x^{3/4}$.

Réciproquement, soit f une telle fonction.

Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4} + \frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}$ et $f\left(\frac{3}{16x}\right) = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4} + \frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}$. Donc

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\Leftrightarrow \forall x > 0, \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4} + \frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4} = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4} + \frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{4} = \frac{3^{3/4}\lambda_2}{8} \text{ et } \frac{3\lambda_2}{4} = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{2}{3^{3/4}}\lambda_1. \end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \left(x^{1/4} + 2 \left(\frac{x}{3} \right)^{3/4} \right)$.

Exercice n° 12

La fonction nulle est solution. Dorénavant, f est une éventuelle solution non nulle. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

• L'égalité $f(x_0)f(0) = \int_{x_0-0}^{x_0+0} f(t) dt = 0$ fournit $f(0) = 0$.

• Pour tout réel y , $\int_{-y}^y f(t) dt = f(0)f(y) = 0$. Maintenant, la fonction f est continue sur \mathbb{R} et donc la fonction $y \mapsto$

$\int_{-y}^y f(t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} . En dérivant, on obtient pour tout réel y , $f(y) + f(-y) = 0$ et donc f est impaire.

• Pour tout réel y , on a alors $f(y) = \frac{1}{f(x_0)} \int_{x_0-y}^{x_0+y} f(t) dt$. Puisque f est continue sur \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x_0)} \int_{x_0-y}^{x_0+y} f(t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et il en est de même de f . Mais alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x_0)} \int_{x_0-y}^{x_0+y} f(t) dt$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et il en est de même de f .

f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

• En dérivant à y fixé ou x fixé l'égalité $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$, on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$ et $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$. En dérivant la première égalité à y fixé et la deuxième à x fixé, on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$. En particulier, pour tout réel x , $f''(x)f(x_0) - f(x)f''(x_0) = 0$ ou encore $f''(x) - kf(x) = 0$ où $k = \frac{f''(x_0)}{f(x_0)}$.

f est solution d'une équation différentielle du type $y'' - ky = 0$.

• f est donc de l'un des types suivants : $x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega > 0$ ou $x \mapsto ax + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ou $x \mapsto \lambda \operatorname{ch}(\omega x) + \mu \operatorname{sh}(\omega x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega > 0$ (suivant que $k > 0$, $k = 0$ ou $k < 0$). De plus, f étant impaire, f est nécessairement de l'un des types suivants :

$$x \mapsto \lambda \sin(\omega x), \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \omega > 0 \text{ ou } x \mapsto ax, a \in \mathbb{R}^* \text{ ou } x \mapsto \lambda \operatorname{sh}(\omega x), \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \omega > 0.$$

Réciproquement,

- si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax, a \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x)f(y) = a^2xy$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{a}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2axy$. Donc f est solution si et seulement si $a = 2$. On obtient la fonction solution $x \mapsto 2x$.

- si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \sin(\omega x), \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \omega > 0$, alors $f(x)f(y) = \lambda^2 \sin(\omega x) \sin(\omega y)$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{\lambda}{\omega}(\cos(\omega(x-y)) - \cos(\omega(x+y))) = \frac{2\lambda}{\omega} \sin(\omega x) \sin(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda = \frac{2}{\omega}$.

On obtient les fonctions solutions $x \mapsto \frac{2}{\omega} \sin(\omega x), \omega > 0$.

- si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \operatorname{sh}(\omega x), \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \omega > 0$, alors $f(x)f(y) = \lambda^2 \operatorname{sh}(\omega x) \operatorname{sh}(\omega y)$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{\lambda}{\omega}(\operatorname{ch}(\omega(x+y)) - \operatorname{ch}(\omega(x-y))) = \frac{2\lambda}{\omega} \operatorname{sh}(\omega x) \operatorname{sh}(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda = \frac{2}{\omega}$.

On obtient les fonctions solutions $x \mapsto \frac{2}{\omega} \operatorname{sh}(\omega x), \omega > 0$.

Exercice n° 13

Existence de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{1+t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que

F est définie sur $]0, +\infty[$.

Dérivées de F . Soient $a > 0$ puis $\Phi : [a, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$

- Pour tout réel $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.
- La fonction Φ admet sur $[a, +\infty[\times]0, +\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variable x et pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}.$$

De plus

- pour tout $x \in [a, +\infty[$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.

- pour tout $t \in]0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues sur $[0, +\infty[$.

- pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{te^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_1(t)$ et $\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_2(t)$ où les fonctions

φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $]0, +\infty[$ car sont dominées en $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), F est deux fois dérivable sur $]a, +\infty[$ et les dérivées de F s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

$$\forall x > 0, F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

Equation différentielle vérifiée par F . Pour $x > 0$, $F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-tx} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

$$\forall x > 0, F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}.$$

Existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$. Soit $a > 0$. Montrons l'existence de $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$.

Soit $A > a$. Une intégration par parties fournit $\int_a^A \frac{\sin u}{u} du = -\frac{\cos a}{a} + \frac{\cos A}{A} - \int_a^A \frac{\cos u}{u^2} du$. Puisque $\left| \frac{\cos A}{A} \right| \leq \frac{1}{A}$, on

a $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$. D'autre part, puisque $\forall u \geq a$, $\left| \frac{\cos u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$, la fonction $u \mapsto \frac{\cos u}{u^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et en

particulier, $\int_a^A \frac{\cos u}{u^2} du$ a une limite quand A tend vers $+\infty$. On en déduit que $\int_a^A \frac{\sin u}{u} du$ a une limite quand A tend

vers $+\infty$ ou encore que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge en $+\infty$. De même, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ converge en $+\infty$.

Mais alors, pour $x > 0$,

$$\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = G(x) \text{ existe.}$$

G est définie sur $]0, +\infty[$.

Equation différentielle vérifiée par G . Puisque la fonction $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ est continue sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_1^x \frac{\sin u}{u} du$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. De même, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ puis G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$G'(x) = -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\cos x \sin x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \frac{\cos x \sin x}{x} = -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du,$$

puis en redérivant

$$G''(x) = -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \frac{\sin^2 x}{x} + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \frac{\cos^2 x}{x} = -G(x) + \frac{1}{x}.$$

$$\forall x > 0, G''(x) + G(x) = \frac{1}{x}.$$

Limites de F et G en $+\infty$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ sont deux intégrales convergentes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = 0$. Puisque les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur \mathbb{R} . On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, $|F(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

Egalité de F et G . D'après ce qui précède, $(F - G)'' + (F - G) = 0$ et donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) - G(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$. Si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, alors $\lambda \cos x + \mu \sin x = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \cos(x - x_0)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - G(x)) = 0$, on a nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et donc $F - G = 0$. On a montré que

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt.$$

Remarque. On peut montrer que l'égalité persiste quand $x = 0$ (par continuité) et on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.